Ministerul Educației și Cercetării
Serviciul Național de Evaluare și Examinare

A 54-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa județeană și a Municipiului București

8 martie 2003

CLASA A X-A

Subiectul 1

În interiorul unui cub se consideră 2003 puncte. Arătați că se poate împărți cubul în mai mult de 2003^3 cuburi astfel încât orice punct din cele date să se afle în interiorul unuia dintre cuburile mici (și nu pe fețe).

Subiectul 2

a) Determinați toate funcțiile $f:\mathbf{N}^* \to M$ cu proprietatea:

$$1+f(n)f(n+1)=2n^2\left(f(n+1)-f(n)\right),\text{ pentru orice } n\in\mathbf{N}^*.$$

în fiecare dintre următoarele situații

a) $M=\mathbf{N}$;

b) $M=\mathbf{Q}$

Subiectul 3

a) Dacă ABC este un triunghi și M un punct în planul său, arătați că

$$AM\sin A \le BM\sin B + CM\sin C.$$

b) Fie A_1, B_1, C_1 puncte pe laturile $(BC),(AC)$ și respectiv (CA) ale triunghiului ABC, astfel încât unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt în această ordine de măsuri α,β,γ. Arătați că

$$\sum AA_1\sin\alpha \le \sum BC\sin\alpha.$$

Subiectul 4

Se dau numerele reale a,b,c,d cu $a>c>d>b>1$ astfel ca $ab>cd$. Demonstrați că funcția $f:[0,\infty)\to\mathbf{R}$, definită prin

$$f(x)=a^x+b^x-c^x-d^x,\text{ pentru orice } x\ge 0,$$

este strict crescătoare.

Timp de lucru: 3 ore